

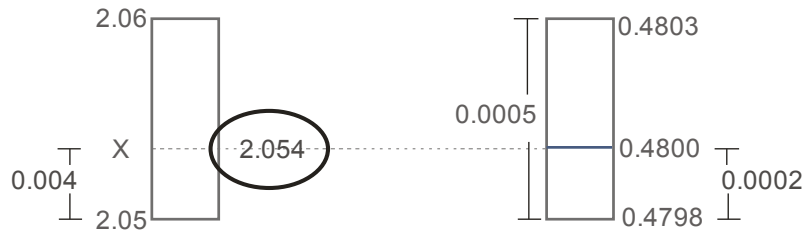
Ahora ya tenemos todos los elementos para encontrar el elemento buscado (X). Tenemos que una distancia total de 0.0005 le corresponde una parcial de 0.0002, ¿Qué distancia parcial le correspondería a una distancia total de 0.01 (2.06-2.05)?

Efectuamos por regla de tres:

DIST. TOTALES	DIST. PARCIALES
0.0005	0.0002
0.01	X

$$\therefore X = \frac{0.01 \times 0.0002}{0.0005} = 0.004$$

Luego la distancia parcial para la primera escala es de 0.004, quedando:



Para conocer la respuesta se efectúan con el siguiente criterio: El número que corresponde en cruz al término desconocido (X) divide a los otros dos números, los cuales se multiplican entre si.

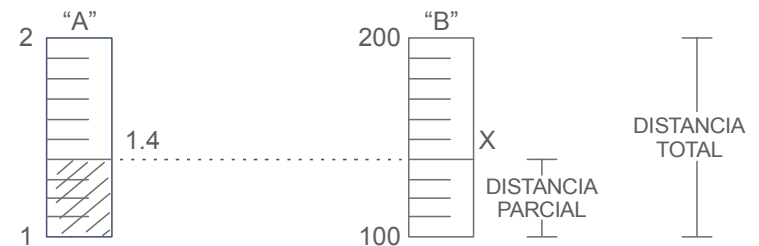
$$X = \frac{(15)(40)}{(10)} \quad X = 60$$

Proporciones:

Supongamos que tenemos 2 escalas paralelas, una que va de 1 a 2 y otra que va de 100 a 200.



Fijamos un nivel determinado para la escala "A", supongamos que el nivel va a ser de 1.4 y buscamos su nivel correspondiente en la escala "B".

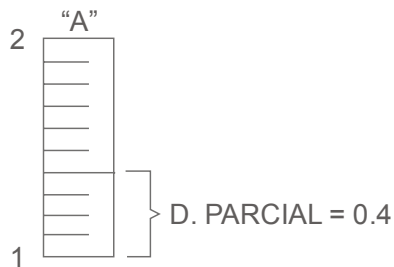


En este caso, la incógnita es el nivel equivalente en la escala "B". Para esto señalaremos en primer lugar los elementos conocidos:

- (1) Conocemos las distancias totales de cada una de las escalas.



- (2) Conocemos la distancia parcial de la escala "A".

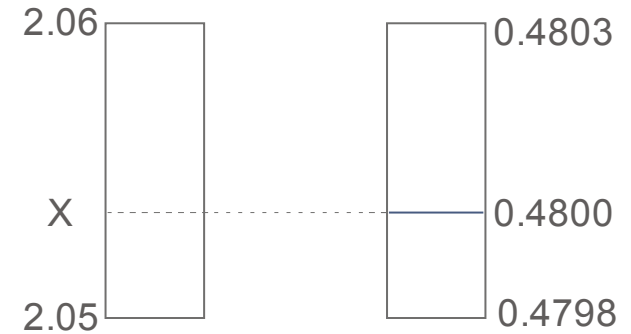


Con estos tres datos, y con ayuda de la regla de tres, podemos deducir el dato que falta, o sea, la distancia parcial de la segunda escala.

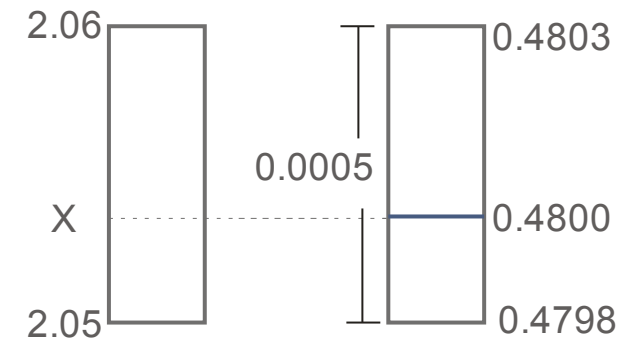
En la primera escala, a una distancia total de 1 le corresponde una parcial de 0.4.

Ahora, ¿Qué distancia parcial le corresponde a una distancia total de 100?

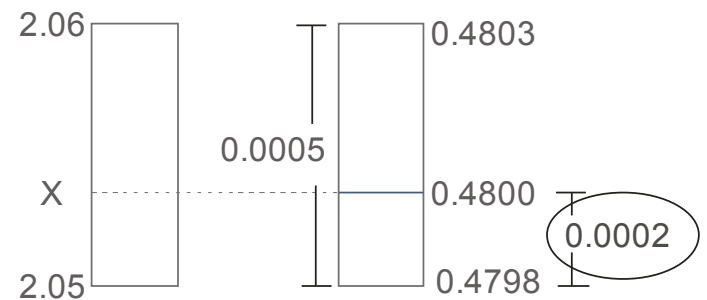
Buscamos el valor de "Z" para 0.4800



Obtenemos la distancia total para la segunda escala:



Y Obtenemos la distancia parcial correspondiente:



INTERPOLACIONES

Para el uso adecuado de las tablas es necesario el empleo de interpolaciones.

El uso de la interpolación, aunque tal vez cambie el nombre, nos será de gran utilidad en el transcurso y desempeño de cualquier carrera universitaria relacionada con las matemáticas.

Usaremos como ejemplo la tabla de áreas bajo la curva normal.

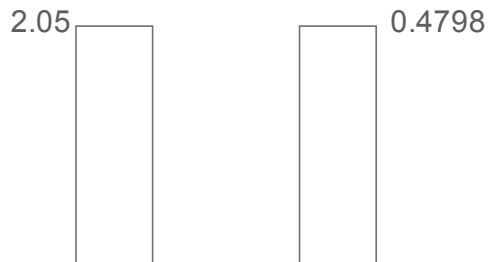
Ejemplo:

A $Z=2.05$ le corresponde un área de 0.4798

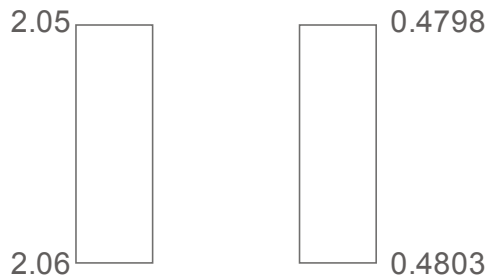
A $Z=2.06$ le corresponde un área de 0.4803

Encontrar el valor de Z para un área de 0.4800 resolviendo:

A $Z=2.05$ Le corresponde un área de 0.4798



A $Z=2.06$ Corresponde un área de 0.4803

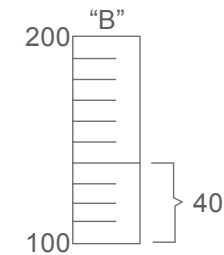


DIST. TOTALES	DIST. PARCIALES
1	0.4
100	X

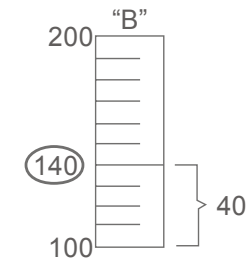
$$\therefore X = \frac{100 \times 0.4}{1} = 40$$

La distancia parcial para la escala " B " es de 40.

Gráficamente:



Por lo tanto:



140 es el punto equivalente al 1.4 de la escala "A".

MEDIDAS DE CENTRALIZACION

- MEDIANA, MODA, MEDIA

Mediana:

¿Sabe que es la Mediana?

Pues es una medida que nunca va usted a usar en su vida, pero claro, necesita pasar la materia y el examen de mañana, por eso está usted leyendo esto, no se aprenda una definición, aprenda el concepto.

Hubo, en algún momento, alguien a quien se le ocurrió formar a un grupo de personas en fila, luego los acomodó por estaturas, después de una profunda disertación los contó, dividió entre dos y se fue caminando hasta llegar al afortunado sujeto marcado por tan primaria división. Para que mejor me entienda usted, se fue con el que estaba en medio. Ese individuo, el que estaba en medio, es el “mediano”, todo lo demás son ganas de complicarse la vida, mismas que podemos resolver con una simple regla de tres.

La mediana para datos agrupados:

Si tomamos nuestro ejemplo de la mediana de la página siguiente, vemos que está claro que la clase mediana es la que comprende a los elementos de la clase 1.60 - 1.70, esa es la respuesta, si están dando como pregunta datos agrupados, la respuesta debe estar en datos agrupados y no una medida dentro de un dato agrupado.

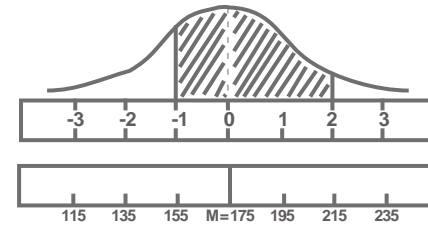
Vamos concediendo que quieran un número mas “representativo”. Bueno, pues el número mas representativo de esa clase es 1.65, pues es el que está en medio de esa clase, tendríamos la respuesta de inmediato, pero no es así, necesitaban algo más exacto, aunque fuera menos representativo. Cualquier semejanza con la política es mera coincidencia.

La historia demuestra que optaron por complicarnos la vida, cuenten a todos, dividan entre dos, que queden los mismos arriba que abajo,

—Ya hicimos la división, fueron cinco y cinco—.

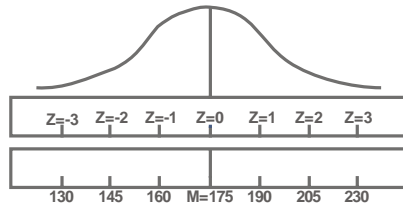
—Sí, ya lo sé, ¿y ahora que hacemos?—.

¿Qué pasa si cambiamos la desviación típica a 20?



Se amplía el rango, la 6σ va de 115 a 235 en lugar de ir de 130 a 220, cuando tenía una desviación típica de 15. Lo cual resulta lógico, pues aumentó la desviación típica que es precisamente una medida de dispersión.

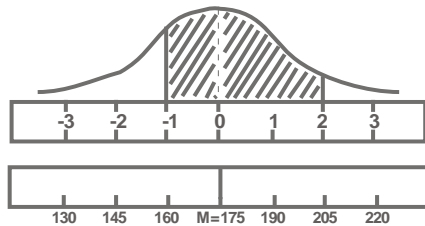
Seguimos esquematizando:



Para $Z = 2$, área = 0.4772
 Para $Z = 1$, área = 0.3414
 Sumamos áreas = 0.8186
 Por lo tanto probabilidad = 81.86%

Ahora:

¿Cuál es el área bajo la curva entre 160 y 205?



Para 160 $Z = 1$ el área es 0.3414
 Para 205 $Z = 2$ el área es 0.4772

Luego área entre 160 y 205 = 0.8186
 O sea 81.86%

—Pues fijate como les cayó la división dentro de nuestro cuadrado mediano....—

—Quedaron dos arriba y tres abajo—

—Pues con eso, hagan las cuentas y ya está, hablesle a fulanito, él sabe regla de tres, nada más fijate que quede más pegado a la escala de abajo que a la de arriba, porque hay más estudiantes abajo que arriba, nada más por eso, si no le sale así, es que está mal—

—Ya está, dice que sale 1.66—

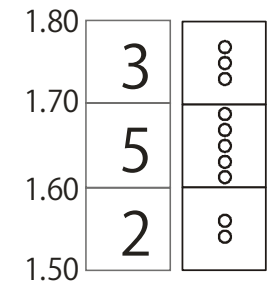
—Pues sí, está lógico, pero bueno, sin tanto lío hubiéramos dicho que eran 1.65, o sea, a la mitad, en fin, así funciona el sistema, que le vamos a hacer—

Repasando:

De la serie de números 2, 3, 4, 5, 200, 250, 251, la mediana es 5, puesto que está en el centro de la serie. Lo mismo es para un problema donde los datos están agrupados. Sólo que es necesario efectuar algunos cálculos.

Ejemplo para datos agrupados:

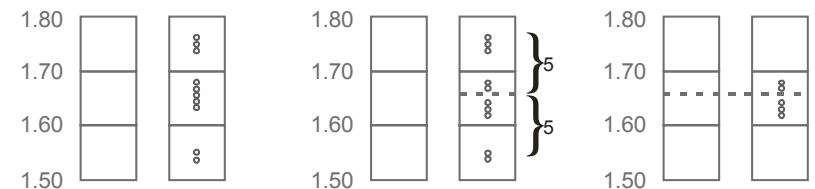
Entre 1.70 y 1.80 hay 3 estudiantes,
 Entre 1.60 y 1.70 hay 5 estudiantes,
 Entre 1.50 y 1.60 hay 2 estudiantes,



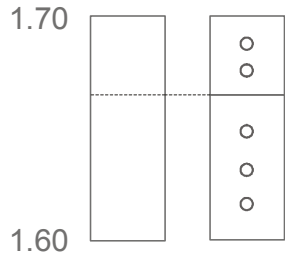
¿Qué estatura será la mediana?

Gráficamente localizamos a la mediana en posición central (cinco estudiantes arriba y cinco abajo).

Cambiamos de escala y obtenemos la estatura mediana.



Cambiamos de escala y obtenemos el valor de la mediana:



El resultado es 1.66

La mediana por fórmula:

$$MEDIANA = L_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - (SF)_1}{F. MEDIANA} \right) C$$

Siendo:

L_1 = Limite inferior de la clase mediana.

N = Número total de datos.

$(SF)_1$ = Suma de frecuencias de las clases por debajo de la clase mediana.

F. Mediana = Frecuencia de la clase mediana

c = Tamaño del intervalo de la clase mediana.

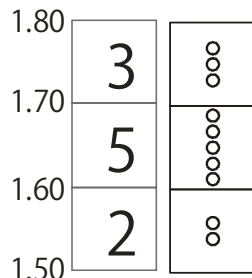
Ejemplo:

Entre 1.70 y 1.80 mts. hay 3 estudiantes

Entre 1.60 y 1.70 mts. hay 5 estudiantes

Entre 1.50 y 1.60 mts. hay 2 estudiantes

¿Qué estatura será la mediana?

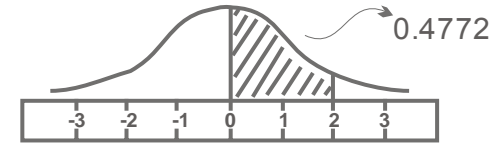


$$MEDIANA = 1.60 + \left(\frac{\frac{10}{2} - 2}{5} \right) 0.10$$

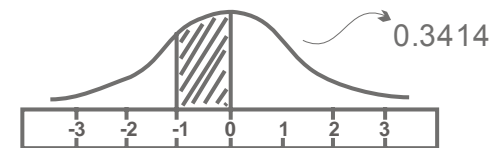
Mediana = 1.60 + 0.06

Mediana = 1.66

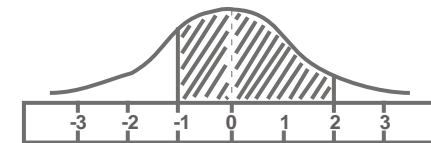
9.4 Primero buscamos el valor para $Z = 2$ en tablas el área es de 0.4772.



9.5 Luego buscamos el valor para $Z = -1$, como la curva es simétrica el valor de $Z = -1$ es igual al de $Z = 1$ en tablas el área es igual a 0.3414.

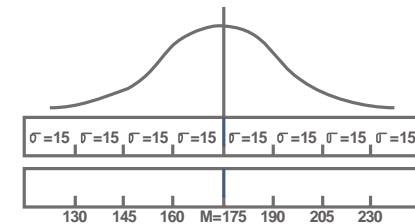


9.6 Efectuando la suma entre dos áreas obtenemos la comprendida entre $Z = -1$ y $Z = 2$.



9.7 Un ejemplo ilustrativo de la distribución normal: siendo la media 175 y la desviación típica de 15, ¿Cuál es el área bajo la curva (probabilidad) para que un evento caiga dentro de 145 y 190?

Esquematizamos la segunda escala con desviación típica de 15:



Ejemplo:

Encontrar el área entre $Z=1$ y $Z=2$

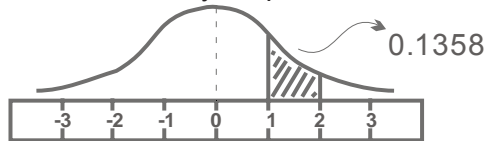
9.1 Primero buscamos el área para $Z=1$, en tablas el área es .3414



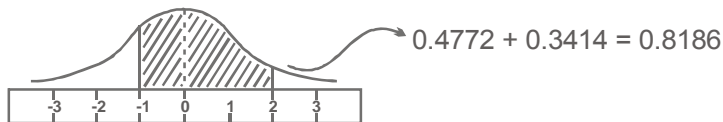
9.2 Luego buscamos el valor para $Z=2$, en tablas el área es 0.4772



9.3 Efectuando la resta entre las dos áreas obtenemos la comprendida entre 1 y 2, que es de 0.1358



En el caso de un valor positivo y otro negativo, se suman los valores de las áreas.



Ejemplo: Encontrar el área bajo la curva comprendida entre $Z = -1$ y $Z = 2$

Moda.

Alguien midió a los estudiantes y anotó sus estaturas, en un simple papel, supongamos que la medida que más se repetía era un metro con setenta centímetros. Me late esta medida, pensó el líder de la banda, vamos a decirle Moda, nombre, que cabe decirlo, está bien empleado. Se le quedó, desde entonces se llama moda. La medida que más se repite es la moda.

Vamos a analizar la moda para datos agrupados:

Tomemos el ejemplo de la página once, sabemos que la clase modal está entre 1.50 y 1.60, luego, el resultado es 1.55, punto, ¿cuál es el problema?.

Resulta que a nuestros amigos, seguramente doctores en algo, aunque sea en matemáticas, déjenme decirles que obtener el grado de doctor en matemáticas es como obtener la constancia de que no encontraron algo útil en todas las matemáticas, se les ocurrió un sistema, toma las frecuencias de la clase de abajo, luego toma las de arriba, y con esos datos haz las cuentas.

—¿Y luego?—.

—Luego ¿qué?—.

—Pues alguien se va a dar cuenta de que está mal—.

—¿Por qué esta mal?—.

—¿Como por qué?, ¿que tal si hay mas frecuencias?, no las va a tomar en cuenta con su sistemita, ¿que tal si hay otra frecuencia que vaya de 1.70 a 1.80 y tenga quince estudiantes?—.

—Bueno, pues el resultado no varía.....—.

—Ahh!!!!—, ahí intervengo yo, Rubén Nohuitol como moderno Quijote de las matemáticas en la lucha por una causa perdida....., tramposos, embusteros....., ¡los sorprendí bellacos!, ¡nos han estado engañando todos estos años, a cientos de miles de estudiantes!, su fórmula está mal, ¿como va a salir lo mismo????, ¿estamos aumentando quince alumnos más y el resultado no varía lo más mínimo?,,,

¿Qué tipo de fórmula es esa, mandrines?

¿Qué no sería mejor una fórmula que dijera por ejemplo, la suma de todas las frecuencias inferiores, comparadas contra la suma de todas las frecuencias superiores?, claro que sí, sería mucho mejor, pero no, ¿quién les vá a decir algo a ustedes, paladines de la burocracia intelectual?.

Yo, Rubén Nohuitol, como lúcido lector de Borges les reclamo el enorme pecado que han cometido desde su escondida y cómoda buhardilla.

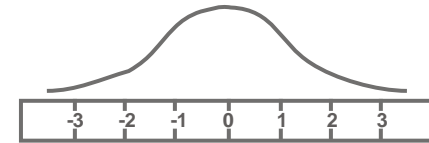
No tendrán ustedes forma de reclamar, mis escasos seguidores, pues en todos los exámenes vienen acomodadas las frecuencias para que no se note tan evidente error, en mediocre contubernio con lo establecido, hacen las preguntas de acuerdo a las respuestas, ¿por qué no, usted, estudiante rebelde reclama y presenta a su maestro una frecuencia adicional con más estudiantes?. Rete al régimen establecido a que dé un resultado diferente con tan distintos datos, el mal llamado maestro les dirá confundido, sin perder la serenidad ni arrogancia, es tarde, la clase ha terminado. Estudiante rebelde, ¡inclínate ante la representación simple de la clase modal o exige que se tomen en cuenta los sufragios de todas las clases, aún de las inexistentes!

Sigamos.

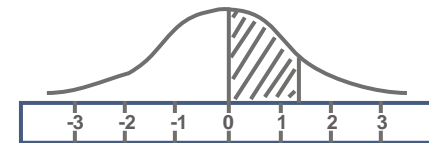
En un ejemplo sencillo; de la serie de números 2, 3, 3, 5, 7, 7, 6, 7, 5, el número modal (moda) es 7, puesto que es el que mas se repite.

Ahora bien, el problema puede ser planteado de un modo mas complicado.

5. La cual tiene valores tipificados, a los que llamamos "z".



6. Estos valores "z" son los únicos que necesitamos para, con ayuda de una tabla, encontrar la probabilidad buscada.



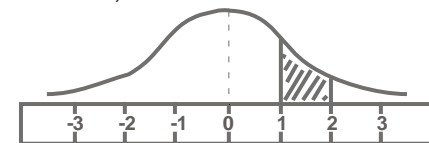
7. El valor que la tabla nos señala es el área bajo la curva comprendida entre cero y el valor "z"



8. Por ejemplo, la probabilidad de que un hecho ocurra entre $Z=0$ y $Z=1$ es de .3414

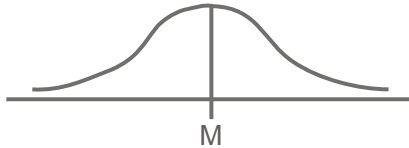


9. En caso de dos valores "z" positivos, se resta el valor de las áreas,



DISTRIBUCIÓN NORMAL (Campana de Gauss)

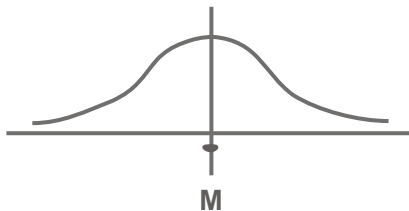
1. La probabilidad total (1, o sea 100%), de que ocurran ciertos sucesos aleatorios, en determinadas circunstancias, se distribuye en forma normal, o sea simétricamente alrededor de la media.



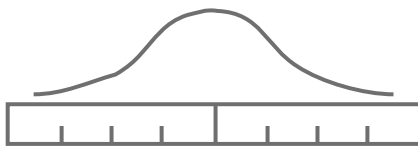
2. Hacemos hincapié en lo señalado en el punto 1, el total del área bajo la curva es de 1.



3. La media, el promedio, siempre tiene más probabilidades de ocurrir, por lo que siempre coincide con el punto más alto de la curva, y en este caso se representa con una vertical.



4. Debajo de la curva existe una escala fija.



Ejemplo:

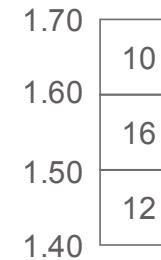
Encontrar la estatura modal de un grupo que se encuentra distribuido de la siguiente forma:

Entre 1.60 y 1.70 hay 10 estudiantes.

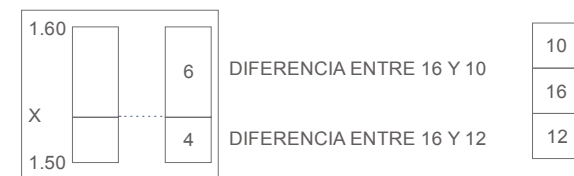
Entre 1.50 y 1.60 hay 16 estudiantes.

Entre 1.40 y 1.50 hay 12 estudiantes.

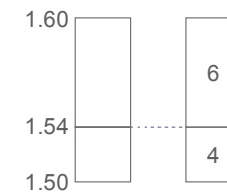
Gráficamente:



Podemos observar que la estatura modal está comprendida en el rango que va de 1.50 a 1.60, y además, que va a estar mas cerca de 1.50 que de 1.60, puesto que 12 es mayor que 10.



Cambiamos de escala y obtenemos la estatura modal (1.54)



La moda por fórmula:

$$\text{MODA} = L_1 + \left(\frac{D_1}{D_1 + D_2} \right) C$$

Donde:

L_1 = Limite Inferior de la clase Modal.

D_1 = Exceso de la frecuencia modal sobre la clase contigua **inferior**.

D_2 = Exceso de la frecuencia modal sobre la clase contigua **superior**.

C = Tamaño del intervalo de la clase modal.

Ejemplo:

Encontrar la estatura modal de un grupo que se encuentra distribuido de la siguiente forma:

1.70	10
1.60	16
1.50	12
1.40	

Entre 1.60 y 1.70 hay 10 estudiantes.

Entre 1.50 y 1.60 hay 16 estudiantes.

Entre 1.40 y 1.50 hay 12 estudiantes.

Sustituyendo:

$$\text{MODA} = 1.50 + \left(\frac{4}{4 + 6} \right) \cdot 10 = 1.54$$

8. Una vez obtenida la superficie hay que encontrar el valor de uno de sus lados.



9. Si para obtener la superficie de un cuadrado elevamos al cuadrado lo que mide un lado, entonces para obtener la longitud de un lado hay que extraer raíz cuadrada de la superficie.

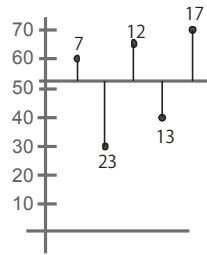
$$\text{SUP.} = (\text{LADO})^2 \quad \therefore \text{LADO} = \sqrt{\text{SUP.}}$$

10. Así obtenemos la longitud de un lado de este cuadrado promedio y se le conoce como desviación típica, esta es la única medida importante para la campana de Gauss.



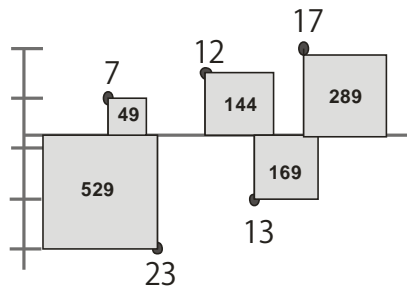
En este ejemplo la varianza es 236 y la desviación típica (σ) es 15.36

5. Se calcula la distancia que existe entre los puntos marcados y la media.



Al promedio de las distancias obtenidas se le llama desviación media. (14.40 en este caso)

6. Con las distancias obtenidas se forman cuadrados, sobra decir que todos los lados de un cuadrado son iguales.



Obtenemos el promedio de las superficies de estos cuadros, en este caso es igual a 236.

7. La superficie de este cuadrado promedio es la varianza.

$$\sqrt{236}$$

Media.

Es la más incluyente de estas tres medidas, toma en cuenta todos los elementos, es un promedio general.

Ejemplo:

- Encontrar la media de 5, 7, 9, 34, 45
- El promedio es: $\frac{5 + 7 + 9 + 34 + 45}{5} = 20$
- La media es: 20

Otro ejemplo:

Entre 1.80 y 1.70 mts. hay 5 estudiantes.
Entre 1.70 y 1.60 mts. hay 6 estudiantes.

Encontrar la media:

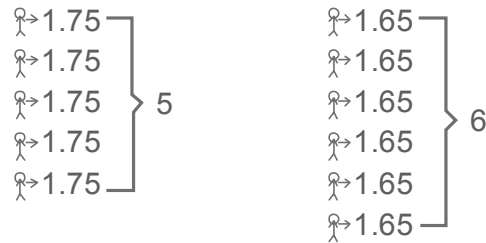
Vamos a partir del supuesto de que los 5 estudiantes miden 1.75 (el punto medio entre 1.80 y 1.70) y los 6 estudiantes miden 1.65 mts.

- Efectuamos la suma de todos ellos.
La suma es: 18.65
- Dividimos la suma entre el total de estudiantes (11) y obtendremos el promedio.
- El promedio es: 1.695

Si observamos, para obtener la suma, no sumamos los números individualmente (a menos que tengamos muchas ganas de trabajar), lo más probable es que hayamos multiplicado 5 por 1.75 y 6 por 1.65 y luego sumamos los resultados para obtener la suma total.

Una vez obtenida la suma (18.65) la dividimos entre el número total de estudiantes (11).

La media que en estos casos se le llama "**Media Ponderada**" es 1.695.



Efectuamos por sentido común:

$$M = \frac{(1.75 \times 5) + (1.65 \times 6)}{11} = 1.695$$

Siguiendo la "fórmula":

$$\text{MEDIA PONDERADA} = \frac{W1 \times 1 + W2 \times 2 + \dots + WK \times K}{W1 + W2 + \dots + WK}$$

Dónde:

W= Peso (Número de frecuencias)

K= Números a ponderar.

Repitiendo:

Entre 1.80 Y 1.70 mts. Hay 5 estudiantes.

Entre 1.70 Y 1.60 mts. Hay 6 estudiantes.

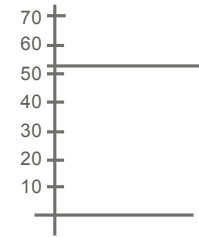
Sustituyendo:

$$\text{MEDIA} = \frac{(1.75 \times 5) + (1.65 \times 6)}{11} = 1.695$$

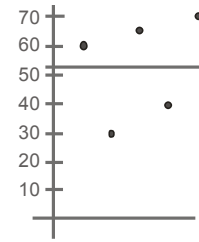
Entendiendo:

La Mediana no toma en cuenta que tan "pesadas" sean las medidas de las puntas, solo escoge a la que esté en medio. Déjeme ponerle un ejemplo, tenemos cinco tipos, uno tiene quinientos camiones, otro cuatrocientos noventa y ocho,

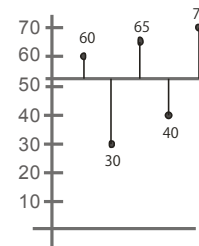
2. Se traza una línea horizontal a la altura de la media.



3. Se marcan los puntos, un poco separados (no importa el eje de las "x").



4. Se trazan líneas verticales, partiendo de cada punto marcado, hasta la línea que representa la media.



hacer que quepan debajo de ella prácticamente todas las eventualidades relacionadas.

Obtenga el promedio (la media) de todos los datos que usted tenga, la escribe en medio del pizarrón, quítele el equivalente a tres desviaciones típicas y obtiene un número, luego, en lugar de quitárselo, súmeselo, y obtendrá un segundo número; bueno amigo, esa es la base de toda esta historia, entre estos dos números que obtuvo, caben la totalidad de eventos, bueno, prácticamente la totalidad, si somos precisos. A esto, tres para acá y tres para allá, le llamaron seis sigma. ¿por qué?, bueno, porque la sigma es el signo que representa la desviación típica.

Hay que decir, como reconocimiento a los teóricos, que esto le puede llegar a servir para algo, en alguna ocasión determinada y con determinados eventos. Lo que pretendo, con la poca humildad que mi condición humana me deja, es tratar de enseñar, cómo, con regla de tres y un poco de sentido común, usted puede entender lo que está haciendo, y lo puede hacer sin fórmulas, lo cual, créame, es una maravilla.

Vamos a repasar el proceso para llegar a la curva normal.

Varianza

La varianza nos indica una medida de dispersión, y está muy ligada a la idea de superficie.

Ejemplo:

¿Cuál es la varianza de 60, 40, 65, 30 y 70?

1. Se obtiene la media, o sea, el promedio de la serie de números.

$$X = \frac{60 + 40 + 65 + 30 + 70}{5} = 53$$

otro tres, otro dos y otro uno. ¿Saben ustedes cuál es el tipo representativo del grupo, según el criterio de la mediana?, el tipo que tiene tres camiones, hágame usted el favor. ¿Qué es lo que hizo la mediana?, no tomó en cuenta los valores de las puntas, simplemente, el valor representativo es el de en medio y toma el valor de tres, como representativo del grupo, lo mismo hubiera dado que el primer tipo tuviera cinco camiones y el segundo tipo tuviera solo cuatro, la mediana hubiera sido la misma: tres.

La Moda no toma en cuenta el número de frecuencias que tienen las colas, mientras no se pasen de determinado límite, el criterio es: la que se repita más, esa es la representativa, lo demás no importa. Déjeme contarle un hecho ficticio, en un club de golf ficticio, hubo una asamblea para subir las cuotas, hábilmente la persona encargada de llevar a cabo la "votación", que no quería que subieran las cuotas, encasilló las propuestas y las puso en el pizarrón, la primera opción, general, era no subir las cuotas, luego apuntó, democráticamente, las demás propuestas, juntando cuatro de ellas. Las votaciones se llevaron a cabo, la opción de no subir las cuotas tuvo ciento treinta votos, las demás, que iban desde subir un tres por ciento a subirlas al triple, consiguieron ciento veinte votos cada una. Bueno, lo que se consiguió fue que no se incrementaran las cuotas, por mayoría de votos. Si usted cree que la voluntad de los socios era que no se subieran las cuotas, está bien, créalo, pero hay quienes pensamos que casi el ochenta por ciento de los socios querían subir las cuotas, sólo que no sabían cuanto, pero las querían subir.

Luego por qué decía Borges que la democracia es un abuso de la estadística. Pero la intención de esto no es criticar ningún sistema electoral, ni subir las cuotas de un club, es dejar claro que hay distintas formas de manejar los números, que le vamos a hacer.

Ese fue el resumen de un tipo de medidas que, claro, fueron etiquetadas con un nombre, y el nombre que les tocó fue el de Medidas de Centralización, en fin, así funciona la ciencia. Por cierto, le recomiendo mi ensayo: "Como hacer huevos estrellados", contiene personales disertaciones sobre las diferencias entre arte, ciencia y técnica, por supuesto no le va a servir para nada, pero tal vez aprenda algo acerca de los huevos estrellados, lo cual sin duda será lo que tenga mayor utilidad en todo el curso.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN:

Nos llevan de la mano, ciegos nosotros por supuesto, por el camino de las fórmulas hasta llegar a la distribución normal o campana de Gauss, ese es el objetivo, a este señor se le ocurrió un modelo, interesante y muy popular en donde, si usted obtiene los datos de la forma que él quiere, le va a dar los resultados que usted necesita, lo cual es una verdadera maravilla.

Vamos a imaginarnos que estamos jugando golf, es un hoyo par tres y tiramos las cuatro personas que vamos jugando. ¿Qué tan dispersas quedaron las bolas respecto al hoyo?, ¿Cuál es la medida de dispersión que debemos usar para representar a ese foursome?, a bueno, pues medimos la distancia del hoyo a la bola, la primera medida, la segunda, la tercera y la cuarta; tomamos las medidas, al más ocioso se le ocurrirá promediarlas, ese promedio es la desviación media, que debería de ser la base lógica, pero no es así. ¿Por qué no sirve esa medida?, pues porque no se adecúa al modelo de Gauss, así es la cosa, para bien o para mal.

Sigamos.

Imagínese las mismas bolas de golf, la línea que une cada bola con el hoyo tiene una medida determinada, con esa medida hacemos un cuadrado, ese cuadrado imaginario tiene una superficie, ahora bien, imagínese que usted promedia la superficie obtenida de los cuatro jugadores, bueno, esa superficie, la superficie promedio, es la varianza, así de fácil.

¿Para qué nos sirve la varianza?, para nada, pero es la última etapa para llegar a una medida que le sirve al Dr. Gauss, que es la desviación típica.

La desviación típica se obtiene de sacar la medida de un lado del cuadro promedio que acabamos de ver. O sea, sacamos raíz cuadrada a la varianza.

Esa medida, la desviación típica, la usamos en la curva normalizadora de datos, (que es su mejor nombre), para